

## Varianta 91

### SUBIECTUL I

- a)  $S = \frac{3\sqrt{39}}{4}$ .
- b)  $a = 0$  și  $b = -3$ .
- c)  $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-7}$ , de unde rezultă că dreptele sunt paralele.
- d)  $\frac{13}{2-3i} = 2+3i$ .
- e)  $E = 1$ .
- f) Punctul A aparține dreptei d:  $2x - 2y = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$  (A).

### SUBIECTUL II

1.

- a)  $x \in (-2, 2)$ .
- b)  $p = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ .
- c) Efectuând împărțirea obținem câtul  $X^2 + X + 3$ .

d)  $A(-1, 6) \in G_f \Leftrightarrow 6 = 6(A)$ .

e)  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$

2.

a)  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 8$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{4x^3} = \frac{1}{4}$ .

d)  $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$ .

e)  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{67}{12}$ .

### SUBIECTUL III

a)  $a_3 = \frac{a_2}{a_1} = 2, a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{8}$  și  $a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{2}$ .

b)  $a_7 = \frac{a_6}{a_5} = 4$  și  $a_8 = \frac{a_7}{a_6} = 8$ .

c)  $a_{n+6} = \frac{a_{n+5}}{a_{n+4}} = \frac{a_{n+4} \cdot a_{n+2}}{(a_{n+3})^2} = \frac{1}{a_{n+3}} \Rightarrow a_{n+3} = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_{n+6} = a_n$ .

d) Folosind c) avem că  $a_{n+6k} = a_n, \forall n, k \in \mathbb{N}$ . Deci  $a_{2007} = a_{3+2004} = a_{3+6 \cdot 334} = a_3 = 2$ .

e) Folosind c) și d) avem că:  $a_3 = a_9 = \dots = a_{2007} = 2$ . Deci sunt 335 elemente egale cu 2.

f) 
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{2007} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_6) + (a_7 + a_8 + \dots + a_{12}) + \dots \\ &+ (a_{1999} + a_{2000} + \dots + a_{2004}) + a_{2005} + a_{2006} + a_{2007} = \\ &= 334(a_1 + a_2 + \dots + a_6) + a_1 + a_2 + a_3 = \frac{19929}{4}. \end{aligned}$$

g)  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2007} = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_6)(a_7 \cdot a_8 \cdot \dots \cdot a_{12}) \dots (a_{1999} \cdot a_{2000} \cdot \dots \cdot a_{2004}) \cdot a_{2005} \cdot a_{2006} \cdot a_{2007} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 64$ .

#### SUBIECTUL IV

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow y=0$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$ .

b)  $f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$ .

c)  $f(-1) = -1, f(1) = 1, f'(-1) = 0$  și  $f'(1) = 0$ .

d)  $\int_0^1 f(x) dx = \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \ln 2$ .

e)  $-1 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \\ 0 \leq (x-1)^2 \end{cases}$  Relații care sunt adevărate  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

f) Din e)  $\Rightarrow f(x) \leq 1$  și  $f(y) \leq 1$  de unde folosind relația  $f(x) + f(y) = 2 \Rightarrow f(x) = f(y) = 1 \Rightarrow x = y = 1$ .

g)  $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + C$ , deci  $F(x)$  este de forma  $F(x) = \ln(1+x^2) + c$ .

Rezultă că  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$ . Atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\ln(x^2)} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{(2 \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$